פתרונות לדף תרגילים 1

1)
$$\frac{1}{1+\cos t+i\sin t}=\frac{1+\cos t-i\sin t}{(1+\cos t)^2+\sin^2 t}=$$
$$\frac{1+\cos t}{2+2\cos t}-i\,\frac{\sin t}{2+2\cos t}=\frac{1}{2}-i\,\frac{\sin t}{2(1+\cos t)}$$

2)
$$|1-z\bar{w}|^2+|z+w|^2=(1-z\bar{w})(1-\bar{z}w)+(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=$$
$$1-\underline{z\bar{w}}-\underline{\underline{\bar{z}w}}+z\bar{z}\cdot\bar{w}w+z\bar{z}+\underline{z\bar{w}}+\underline{\underline{w\bar{z}}}+w\bar{w}=$$
$$=1+|z|^2+|w|^2+|z|^2|w|^2=(1+|z|^2)(1+|w|^2)$$

באופן דומה
$$|1-z\bar{w}|^2-|z-w|^2=(1-z\bar{w})(1-\bar{z}w)-(z-w)(\bar{z}-\bar{w})=$$
$$1-|z|^2|w|^2-|z|^2-|w|^2=(1-|z|^2)(1-|w|^2)$$

משיוון שני נובע
$$1-\frac{|z-w|^2}{|1-z\bar{w}|^2}=\frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-z\bar{w}|^2}>0$$
עבור $|z|<1$
$|w|<1$

<u>הערה</u> יהי $D=\{z:|z|<1\}$ יהי $w\in D$

נגדיר פונקציה $f_w(z)=\frac{z-w}{1-z\bar{w}}$ $\quad f_w: D\longrightarrow \mathbb{C}$

מתרגיל נובע ש $f_w: D\longrightarrow D$. קל לראות

ש f_w חח"ע ועל! $f(w)=0$.

3) עלינו להוכיח ש עבור $|z|<1$

$$\left|\frac{3+z^{3n}-|z|}{3-z^{5n}+z^{4n}-z}\right| \le \frac{5}{3(1-|z|)}$$

$$\left|3+z^{3n}-|z|\right| \le 3+|z^{3n}|+|z| \le 5$$

$$|3-z^{5n}+z^{4n}-z| \ge 3-|z|^{5n}-|z|^{4n}-|z| \ge 3-3|z|=3(1-|z|)$$

לכן המנה $\le \frac{5}{3(1-|z|)}$

4) ראינו בכיתה ש $\varphi(z)=\left(\frac{2\operatorname{Re} z}{|z|^2+1}, \frac{2\operatorname{Im} z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$

לכן אם קואורדינטות של $\varphi(z)$ הן (x_1, x_2, x_3)

אז קואורדינטות של $\varphi(\bar{z})$ הם $(x_1, -x_2, x_3)$

5) נניח בשלילה שעבור $|z|\le 1$ מתקיים

$z^3+3z+5=0$

כי $4 \ge |z|^3+3|z| \ge |z^3+3z| = |-5| = 5$ סתירה

6) א) $z^2+\bar{z}^2=2 \Leftrightarrow (x+iy)^2+(x-iy)^2=2 \Leftrightarrow$

$x^2-y^2=1$ הפרבולה

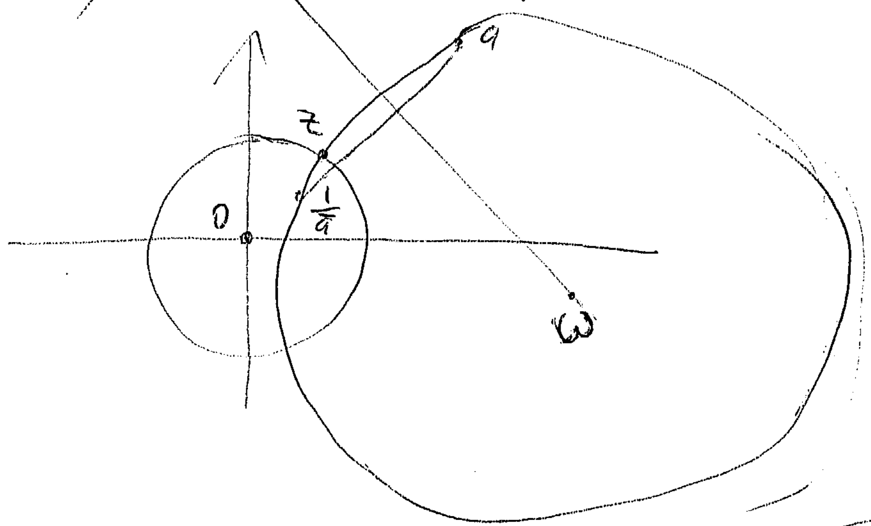
ב) $|z-i|=|z+i|$ – כל הנקודות על ציר x

$(z-i)(\bar{z}+i)=(z+i)(\bar{z}-i) \Leftrightarrow z-\bar{z}=\bar{z}-z \Leftrightarrow z=\bar{z}$

ג) כל מתחת מישור $\operatorname{Re}((x+iy)(1-i))=x+y<\sqrt{2}$

7) נשים לב ש $|a| = \frac{1}{|\frac{1}{a}|}$

לכן ~~רק~~ אחת מנקודות a, $\frac{1}{a}$ נמצאת בחוץ למעגל היחידה, ושניה בפנים



וכי ω - מרכז המעגל העובר דרך a ו $\frac{1}{a}$.
עלינו להוכיח כי משיקים בנקודה z לשני המעגלים מאונכים. רדיוס תמיד מאונך למשיק לכן עלינו להוכיח שווקטורים z ו $z-\omega$ מאונכים. לפי משפט פיתגורס זה שקול ל:

$$|z|^2+|z-\omega|^2=|\omega|^2$$

נשים לב ש $|a-\omega| = |z-\omega|$ כיוון ו $1=|z|$

$\cancel{|z|^2+|z-a|^2}$

$$1+|a-\omega|^2=|\omega|^2 \Leftrightarrow 1+(a-\omega)(\bar{a}-\bar{\omega})=\omega\bar{\omega} \Leftrightarrow$$

$$Re\,\omega\bar{a} = \frac{|a|^2+1}{2}$$

מצד שני ω שייך לישר $l=\{\frac{a+\frac{1}{a}}{2}+t\cdot i(a-\frac{1}{a})\}$ העובר דרך אמצע הקטע $[\frac{1}{a},a]$ ומאונך לו

צ"ל

$$\omega = \frac{a+\frac{1}{a}}{2}+it(a-\frac{1}{a}) \Rightarrow \bar{a}\omega = \frac{|a|^2+1}{2}+it(|a|^2-1)$$

לכן $\frac{|a|^2+1}{2} = Re\,\bar{a}\omega$ כנדרש.